

Objectif

Les notions employées dans ce TD ne sont, pour la plupart, pas nouvelles pour un étudiant entrant en école d'ingénieur. Ces notions constituent des briques élémentaires de raisonnement, de vocabulaire, de notation et de manipulations algébriques qu'il faut absolument maîtriser pour être en mesure de suivre convenablement l'année scolaire, que ce soit en mathématiques ou en physique. Ainsi, à l'issue de ce module, tout étudiant devrait être capable de répondre presque sans erreur ni hésitation à l'ensemble des exercices proposés ici. Si ce n'est pas le cas, pas de panique : cela signifie simplement que vous devez retravailler certaines notions afin de mieux les assimiler. Vous pourrez alors revenir à ce TD à n'importe quel moment de l'année, et ce, autant de fois que nécessaire.

1 Logique

À savoir absolument !

- Lorsque P et Q sont deux propositions logiques (c'est-à-dire des phrases qui sont soit vraies soit fausses), la notation

$$P \implies Q$$

désigne l'implication " P implique Q " ou encore "si P alors Q ". Lorsqu'on écrit ceci, on veut dire que si P est vraie, alors Q est nécessairement vraie.

- La réciproque de $P \implies Q$ est l'implication $Q \implies P$. Elle ne dit pas la même chose et n'a aucune raison d'être vraie lorsque $P \implies Q$ est vraie. Par exemple, si un animal est un zèbre, alors c'est un mammifère, mais la réciproque est fausse.
- La contraposée de $P \implies Q$ est l'implication $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$. Cette implication dit rigoureusement la même chose que $P \implies Q$. Pour reprendre l'exemple plus haut, la contraposée serait "si un animal n'est pas un mammifère, alors ce n'est pas un zèbre".

✍ A faire en classe

Exercice 1. Compléter les phrases suivantes par le connecteur logique qui convient : $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. Habiter en France Être parisien.
2. Avoir la moyenne dans toutes les matières Valider son année à l'Isen.
3. Être à son bureau Travailler.

✍ A faire en classe

Exercice 2. Compléter les phrases mathématiques suivantes par le connecteur logique qui convient : $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 4$ $x = 2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. n est divisible par 2 n est divisible par 4.
3. $A \in [B, C]$ A, B et C sont alignés.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\theta = \pi$ $\cos(2\theta) = 1$.
5. Soit ABC un triangle dans le plan. ABC rectangle en C $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x| \leq 3$ $0 \leq x \leq 3$.
7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $ab > 0$ $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 3. Quatre cartes comportant un chiffre sur une face et une couleur sur l'autre sont disposées à plat sur une table. Une seule face de chaque carte est visible. Les faces visibles sont les suivantes : 5, 8, Bleu, Vert.

On veut vérifier que la règle suivante est respectée par les quatre cartes : « si une carte a un chiffre pair sur une face, alors elle est bleue sur l'autre face ».

Quelle(s) carte(s) retourner pour être certain de la véracité de cette règle ? *On ne doit pas retourner de carte inutilement, ni oublier d'en retourner une utile.*

Exercice 4 (Equivalence, implication, ou égalité?). Dire si les symboles utilisés sont corrects.

1. Développons le polynôme $x(x-1)(x+2)$.

$$x(x-1)(x+2) \Leftrightarrow (x^2-x)(x+2) \Leftrightarrow x^3+x^2-2x$$

2. Calculons la dérivée de f , définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+2} + e^x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+1}{x+2} + e^x \\ &= \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} + e^x \\ &= \frac{3}{(x+2)^2} + e^x \end{aligned}$$

A faire en classe

Exercice 5. Donner la contraposée et la réciproque des implications suivantes. Donner leurs valeurs de vérité.

- S'il pleut alors il y a des nuages.
- Si un triangle ABC est rectangle en B alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
- Si un entier n est pair alors n^2 est pair.
- Si un nombre x est irrationnel alors x^2 est irrationnel.
- Si une fonction f admet un extremum en un point a , alors $f'(a) = 0$.

Exercice 6. On définit la proposition P : "Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle" et les propositions

- a) Q_1 : Les diagonales de $ABCD$ ont même longueur.
- b) Q_2 : $ABCD$ est un carré.
- c) Q_3 : $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit.
- d) Q_4 : Les diagonales de $ABCD$ sont médiatrices l'une de l'autre.
- e) Q_5 : Les diagonales de $ABCD$ ont même milieu.

Dire si chacune des propositions Q_i est pour P une condition nécessaire non suffisante, une condition suffisante non nécessaire, une condition nécessaire et suffisante, ou ni l'un ni l'autre.

Attention : la langue française orale peut parfois induire en erreur quant à la signification de l'expression « il faut »...

Exercice 7. Donner la négation des phrases suivantes :

- Il aime le chocolat et la vanille.
- Il aime le chocolat ou la vanille.
- Il n'aime ni le chocolat ni la vanille.
- Tous les hommes sont mortels.
- Dans toutes les prisons, tous les détenus détestent tous les gardiens.

Exercice 8. Parmi les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes :

1. Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
2. Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.
3. Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
4. Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
5. Il est nécessaire et suffisant de travailler régulièrement pour avoir son examen.
6. Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
7. Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
8. Tu auras ton examen si et seulement si tu travailles régulièrement.
9. Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
10. Travail régulier implique réussite à l'examen.
11. On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement.
12. Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement, et si on travaille régulièrement, on obtient son examen.

Exercice 9. "S'il pleut, Pierre prend un parapluie. Marie ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut". Que peut-on déduire de ces affirmations dans les différentes situations ci-dessous ?

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. Pierre se promène avec un parapluie. | 4. Marie se promène sans parapluie. |
| 2. Pierre se promène sans parapluie. | 5. Il pleut. |
| 3. Marie se promène avec un parapluie. | 6. Il ne pleut pas. |

2 Ensembles

À savoir absolument !

- Si X est un ensemble, écrire " $x \in X$ " signifie que x est un élément de l'ensemble X . Cela se lit " x appartient à X ".
- Si X et Y sont deux ensembles, écrire " $X \subset Y$ " signifie que tous les éléments de X appartiennent à Y . Cela se lit " X est inclus dans Y ".
- Si X et Y sont deux ensembles, la notation $X \cap Y$ désigne l'intersection de X et Y , c'est-à-dire l'ensemble des éléments communs à X et Y .
- Si X et Y sont deux ensembles, la notation $X \cup Y$ désigne l'union de X et Y , c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à X ou Y .

A faire en classe

Exercice 10. Rappeler ce que désignent les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Donner les inclusions entre ces ensembles. Donner des exemples de nombres qui sont dans un ensemble mais pas dans un autre.

A faire en classe

Exercice 11. 1. Soit $X = \{0, 1, 2\}$. A-t-on :

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------|------------------------|---------------------------|
| a) $0 \in X$? | b) $0 \subset X$? | c) $\{0\} \subset X$? | d) $\{0\} \in X$? |
| e) $\{0, 1\} \subset X$? | f) $\{0, 1\} \in X$? | g) $\{0, 2\} \in X$? | h) $\{0, 2\} \subset X$? |
| i) $\{0, 1, 3\} \subset X$? | | | |

2. Soit $X = [1, 3[$. A-t-on :

- | | | | |
|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| a) $0 \in X$? | b) $1 \in X$? | c) $3 \in X$? | d) $\frac{11}{7} \in X$? |
| e) $\pi \in X$? | f) $\{0\} \subset X$? | g) $\{1, 2\} \subset X$? | h) $\{2\} \in X$? |
| i) $\{1, 3\} \subset X$? | j) $[0, 2] \subset X$? | k) $[2, 3] \subset X$? | l) $[2, \frac{5}{2}[\subset X$? |

Exercice 12. Dans chacun des cas suivants, donner $X \cap Y$ et $X \cup Y$.

- | | |
|--|---|
| a) $X = \{0, 1, 2\}$ et $Y = \{-1, 1, 3\}$. | b) $X = [0, 2]$ et $Y = [-1, 1[$. |
| c) $X = [0, 1[$ et $Y =]1, 2]$. | d) $X = \mathbb{N}$ et $Y = [\pi, 8[$. |

Exercice 13. Donner tous les éléments des ensembles suivants :

- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{2} \leq n \leq 2\pi\}$.
- $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, 60 = np\}$.

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, dire si on a $A \subset B$ ou $B \subset A$ (ou les deux).

- $A = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \cos \theta = \sin \theta\}$ et $B = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n \geq n^2\}$ et $B = \mathbb{N}$.

3 Puissances

À savoir absolument !

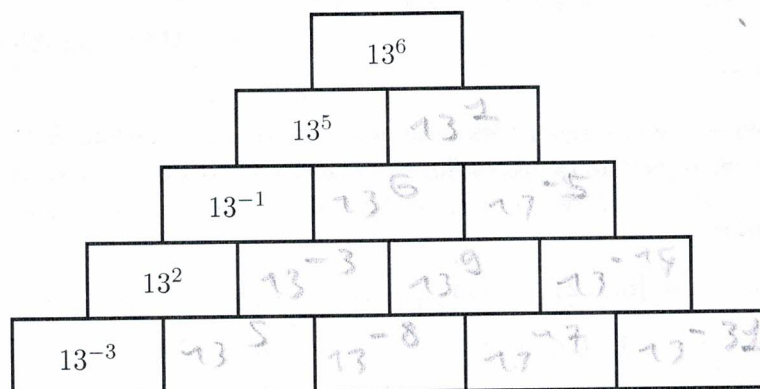
On rappelle les propriétés suivantes des puissances, vraies pour tous réels positifs a et b , et tous entiers relatifs m et n :

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

On rappelle également que la racine n -ième d'un nombre positif x est le seul nombre positif a vérifiant $a^n = x$. On la note $\sqrt[n]{x}$. Les propriétés des racines étant compatible avec celles des puissances, on note alors $x^{\frac{1}{n}}$ pour la racine n -ième de x .

✍ A faire en classe

Exercice 15. Compléter la pyramide de façon à ce que chaque case soit le produit des deux cases en-dessous.



✍ A faire en classe

Exercice 16.

1. Écrire sous la forme $a^n b^k$ les quantités suivantes : 3^{2k-3n} , $\frac{2^k(-3)^{n-k}}{2^{2n-k}}$, $\frac{4^{\frac{n}{2}+k}}{5^{\frac{k}{3}}}$.
2. Écrire sous la forme a^n les quantités suivantes : $\sqrt{\sqrt{3}}$, $\frac{21^5}{7^5}$, $\sqrt{2^3}$, $(5^{-3})^{-2}$.
3. Écrire sous la forme $\sqrt[n]{a}$ les quantités suivantes : $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$, $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{11}}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$, $\sqrt{3} \times \sqrt[4]{4}$.
4. À quelle condition sur les réels positifs a et b a-t-on

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b} \quad ?$$

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^n = 5^n$

b) $9^n = 3^{n+4}$

c) $2^{-2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

d) $3^{2n} - 4 \cdot 3^n + 3 = 0$

e) $4^n + 2^n = 6$

f) $3^{n+1} = 2^{-n^2}$

4 Trigonométrie

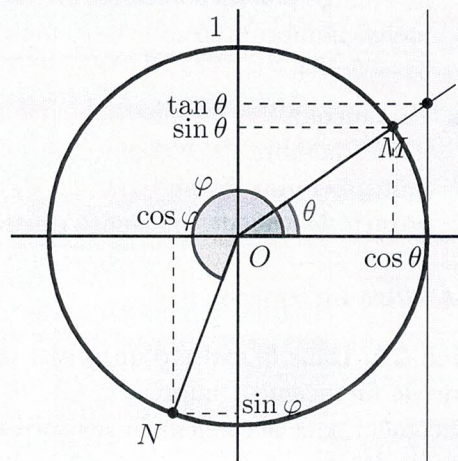
À savoir absolument !

Rappel : Le cercle trigonométrique est le cercle du plan centré en l'origine O et de rayon 1. Tout point M de ce cercle est repéré par l'angle θ entre la demi-droite $[Ox)$ et le segment $[OM]$.

L'abscisse de ce point est alors noté $\cos \theta$ et son ordonnée est notée $\sin \theta$. On définit également

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

La mesure d'un angle en radians correspond à la longueur de l'arc parcouru sur le cercle trigonométrique.



✍ A faire en classe

Exercice 18. Compléter le tableau suivant sans calculatrice :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	0

✍ A faire en classe

Exercice 19. Compléter les égalités suivantes, dans le cas où les angles seraient remarquables.

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \dots\dots\dots$

b) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \dots\dots\dots$

c) $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dots\dots\dots$

d) $\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots$

e) $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \dots\dots\dots$

✍ A faire en classe

Exercice 20. Résoudre dans $[0; 2\pi[$:

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

c) $\tan(x) = 1$

d) $2\sin^2(x) - 1 = 0$

Exercice 21. Lister plusieurs identités trigonométriques fondamentales.

5 Equations/inéquations

À savoir absolument !

- Une équation est une égalité faisant intervenir une ou des variable(s) inconnue(s). Résoudre l'équation, c'est trouver toutes les solutions.
On rappelle qu'ajouter (ou soustraire) un même nombre de part et d'autre de l'équation ne change pas les solutions. De même si on multiplie (ou divise) de part et d'autre par un même nombre non nul. Ceci permet de résoudre les équations du premier degré, comme $3x - 2 = 4$.
- Une inéquation est une inégalité faisant intervenir une ou des inconnue(s). L'ajout d'un même nombre de chaque côté ne change pas les solutions. Attention lorsque l'on veut multiplier (ou diviser) par un même nombre non nul de chaque côté : si ce nombre est négatif, le sens de l'inégalité est inversé : $2 + 3 \leq 7$ mais $-2 \cdot (2 + 3) \geq -2 \cdot 7$.

✍ A faire en classe

Exercice 22. Dans le cadre d'un projet de rénovation du foyer de l'ISEN, une étudiante réalise une demande de financement auprès du CROUS. Son projet actuel se monte à 3883,02 euros. Ses sources de financement sont actuellement les suivantes :

Financier	Montant TTC (€)
Part du porteur du projet	1 000
Part autres financeurs :	944
• Bénévolat (444)	
• BDE (500)	
Montant sollicité auprès de la commission CROUS*	1927.02
TOTAL	3883.02

Le cahier des charges du financeur indique que « la subvention demandée ne peut pas dépasser 50% du montant du projet ».

1. Est-ce que son budget répond au cahier des charges du CROUS ?
2. Le BDE réduit finalement son financement à 250 euros. Est-ce que la deuxième version du budget répond au cahier des charges du CROUS ?
3. Quel est le montant minimal que le BDE doit verser pour que le cahier des charges soit respecté ?

4. On veut généraliser le problème précédent. On note T le montant total du projet, P la part du porteur de projet, B la part du bénévole, E la part du BDE et C le montant sollicité au CROUS. Quelles équations doivent être vérifiées pour que le cahier des charges soit vérifié ?
5. Créer une feuille Excel permettant de vérifier automatiquement si le cahier des charges est vérifié.

✍ A faire en classe

Exercice 23. Un étudiant de l'Isen a obtenu la note de 6/20 au contrôle continu de mathématiques. Déterminer la note minimale qu'il lui faudrait obtenir au devoir de synthèse pour atteindre une moyenne de 10/20, sachant que le contrôle continu compte pour 60% de la note finale, tandis que le devoir de synthèse compte pour 40%.

✍ A faire en classe

Exercice 24. Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

1. $10x - 4(2x - 1) - 6 = 0$.
2. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 0$.
3. $\frac{x - 1}{3} = \frac{2x + 1}{5}$
4. $\frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x + 1}$
5. $(x + 1)(x + 2)(x + 3) > x(x + 1)(x + 2)$.

Exercice 25. Une voiture roule à 80 km/h pendant 2 heures, puis à 60 km/h pendant t heures. La distance totale parcourue est de 260 km. Déterminer t .

Exercice 26. Un rectangle a un périmètre de 20 cm et une aire de 24 cm². Déterminer ses dimensions.

✍ A faire en classe

Exercice 27. Un triangle rectangle a des côtés de longueurs x , $x + 1$ et $x + 2$. Déterminer les valeurs possibles de x .

Exercice 28. Une corde est posée sur l'équateur terrestre. On ajoute 6 mètres de corde. Quelle est la hauteur de la corde, une fois retendue ? On considérera une Terre parfaitement sphérique et une corde non-élastique.

Reprendre la même question avec une orange.

Exercice 29. On sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

6 Développer/Factoriser

À savoir absolument !

- Le développement d'une expression utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc, \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

- On rappelle les identités remarquables, à reconnaître dans les deux sens :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

- Factoriser est l'opération inverse du développement. Le but est d'écrire une somme sous forme de produit, ce qui correspond par exemple à la lecture des identités remarquables ci-dessus de la droite vers la gauche.

 A faire en classe

Exercice 30. Trouver toutes les fonctions f de la forme $f : x \mapsto ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) - f(x) = 2.$$

Exercice 31.

1. Rappeler le développement de $(a+b)^2$.
2. Développer à la main $(a+b)^3$.
3. Faire de même pour $(a+b)^4$.
4. Faire de même pour $(a-b)^4$.

 A faire en classe

Exercice 32. Factoriser les polynômes suivants.

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $x^2 - 3x + 2$ | b) $x^2 - 4x + 4$ |
| c) $2x^2 + 4x + 2$ | d) $3x^2 + 5x - 2$ |
| e) $2x^3 + 6x^2 + 4x$ | f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ |

Exercice 33. Factoriser les expressions suivantes.

1. $ax + ay + bx + by$
2. $5a - 10b + ab - 2b^2$
3. $(1-x)((2-x)(m-x) - (m-2)) - (m-2) - (2-x)(2-m)$, où m est un paramètre réel.
4. $(-4-x)((-4-x)(-3-x) - 1) - 2(2(-3-x) - 1) + 2 - (-4-x)$

7 Fractions

À savoir absolument !

On rappelle les propriétés générales suivantes :

• $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$.	• $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$.
• $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \times D + C \times B}{B \times D}$.	• $\frac{A \times B}{C \times B} = \frac{A}{C}$.

 A faire en classe

Exercice 34 (Résistances).

1. On associe deux résistances R_1 et R_2 en parallèle. Cela équivaut à une seule résistance R vérifiant la relation $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Exprimer R en fonction de R_1 et R_2 .
2. Même question avec trois résistances.
3. On associe maintenant 2 résistances R_1 et R_2 en série, que l'on associe à une troisième résistance R_3 en parallèle. On a donc la relation $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}$. Exprimer R en fonction des 3 résistances.

✍ A faire en classe

Exercice 35. Simplifier au maximum les fractions suivantes. A chaque fois, une ou plusieurs bonnes réponses peuvent être proposées.

1. $\frac{a+b+c}{a+b} =$

a) $1 + \frac{c}{a+b}$

b) c

c) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+b}$

d) $1+c$

2. $\frac{abc}{a+b} =$

a) $1 + \frac{c}{a+b}$

b) c

c) $\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \times \frac{c}{a+b}$

d) $1+c$

e) $\frac{c}{2}$

f) Aucune des autres propositions n'est correcte

3. $\frac{a+b}{abc} =$

a) $\frac{1}{c}$

b) $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$

c) $\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \times \frac{c}{a+b}$

d) Aucune des autres propositions n'est correcte

4. $\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a}{b}} =$

a) $\frac{1}{c}$

b) $\frac{b^2}{c}$

c) $\frac{a^2}{c}$

d) $\frac{c}{b}$

Exercice 36. Écrire d'une façon qui vous semble plus simple :

a) $\frac{x^2+2x}{x}$

b) $\frac{x^2-1}{x+1}$

c) $\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{S}}$

d) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

e) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

f) $\frac{x-1}{x}$

Exercice 37. À quelles conditions sur les réels a , b et c a-t-on

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\frac{b}{c}} \quad ?$$

8 Proportionnalité

À savoir absolument !

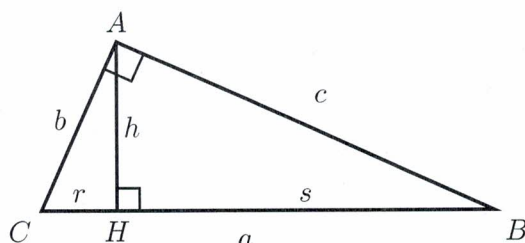
Deux grandeurs sont proportionnelles si multiplier la valeur de l'une par un nombre k entraîne la multiplication de l'autre par le même nombre k .

En notant X et Y ces deux grandeurs, cela revient à dire

$$Y = aX, \text{ avec } a \text{ un certain nombre.}$$

Cela revient à dire que si l'on trace les valeurs de Y en fonction des valeurs de X correspondantes, on obtient une droite passant par l'origine du repère.

Exercice 38. On considère un triangle ABC rectangle en A et on trace la hauteur issue de A , qui coupe le segment $[BC]$ en H . On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = AH$, $r = CH$ et $s = HB$.



1. Justifier que les triangles AHC et ABH sont semblables à ABC . Quel est le lien avec la proportionnalité ?
2. En déduire des relations entre les distances de l'énoncé.
3. Démontrer le théorème de Pythagore.

A faire en classe

Exercice 39. Alex, accompagnateur de moyenne montagne, déploie une carte IGN sur une table afin d'inculquer à son groupe du moment quelques rudiments de lecture de carte. Au début enthousiastes, les mines se font de plus en plus déconfites au fur et à mesure que les informations affluent, jusqu'au moment critique où Alex leur pose une question : « Sachant que notre carte est à l'échelle $1/25000$, et que le dénivelé entre deux lignes de niveau consécutives est de 10 mètres, quelle est la distance (sur la carte) entre 2 lignes de niveau consécutives si on se déplace sur une pente de 45° ? On ne continuera pas notre randonnée tant que vous ne m'aurez pas donné la bonne réponse. »

Aider le groupe à répondre à cette question.

A faire en classe

Exercice 40.

1. Dans chaque situation, dire si la relation de proportionnalité proposée est vraie.
 - En voiture, la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours.
 - On considère une boule sur une pente inclinée, que l'on lâche sans vitesse initiale. La distance parcourue par la boule sur cette pente est proportionnelle à la durée du mouvement (on néglige les frottements de l'air et du support).
 - On tire une flèche avec un angle de 45° . La distance horizontale parcourue par la flèche est proportionnelle à la durée du mouvement (on néglige les frottements de l'air).
 - La masse d'un cube de bois est proportionnelle à la longueur de son côté.
2. Donner des exemples de grandeurs physiques proportionnelles.
3. On sait que la norme de la force de gravitation qui s'exerce entre deux corps est proportionnelle à la masse de chacun des deux corps et inversement proportionnelle au carré de la distance entre ces deux corps. Donner l'expression de la norme de la force de gravitation qui s'exerce entre deux corps de masses respectives m_1 et m_2 , situés à une distance r l'un de l'autre.

Exercice 41. Deux vecteurs du plan sont dits colinéaires si leurs coordonnées dans la base usuelle sont proportionnelles. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) soit colinéaire à $\vec{v}$ de coordonnées $(2, 3)$.

Exercice 42. La loi des gaz parfaits s'exprime en une relation entre pression P (en Pa), volume V (en m^3), quantité de matière n (en mol) et température T (en K) de la forme

$$PV = nRT,$$

où R est une valeur constante.

1. Les autres quantités restant fixes, la pression est-elle proportionnelle à la température ?
2. Les autres quantités restant fixes, la pression est-elle proportionnelle au volume occupé ?
3. On considère une certaine quantité d'un gaz parfait qui, à une pression de 1013 hPa et une température de 293 K, occupe un volume de 20 L. Quelle sera la pression de ce même gaz s'il est comprimé dans un volume de 10L et soumis à une température de 322,3 K ? Avez-vous besoin de connaître la quantité de matière ou la valeur de R pour ce calcul ?
4. On donne $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Quelle est la quantité de matière de ce gaz ?
5. Si ce gaz passe de 20°C à 40°C , sans changer la quantité de matière ni le volume, la pression est-elle multipliée par deux ?

9 Fonctions usuelles

À savoir absolument !

- La fonction exponentielle $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\exp(x) > 0$. On note aussi e^x pour $\exp(x)$, où e est le nombre $\exp(1)$, environ égal à 2,718.
- La fonction logarithme népérien $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les propriétés fondamentales de ces deux fonctions sont les suivantes :
 1. $\exp(0) = 1$ et $\ln(1) = 0$.
 2. Pour tous réels x et y ,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{et} \quad \exp(xy) = \exp(x)^y.$$

3. Pour tous réels strictement positifs x et y ,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \text{et} \quad \ln(x^y) = y \ln(x).$$

4. Pour tout réel x et tout réel strictement positif y ,

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{et} \quad \exp(\ln(y)) = y.$$

A faire en classe

Exercice 43.

1. On donne les valeurs approchées de $\ln$ en certains points. Compléter le tableau sans utiliser de calculatrice.

x	0,5	1	2	e	3	4	$2e$	6	7	8	21	e^4	56
$\ln(x)$			0,69		1,10				1,95				

2. On donne les valeurs approchées de $\exp$ en certains points. Compléter le tableau sans utiliser de calculatrice (ou en tout cas rien d'autre que $+$, $-$, $\times$ et $/$).

x	-1	0	$\ln(3) - 1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\ln(2)$	1	$\frac{4}{3}$	2	$\ln(3) + \ln(4)$	4
$\exp(x)$					1,95		2,72				

 A faire en classe

Exercice 44. Écrire d'une autre façon les expressions suivantes :

- $\exp(3+x)$, e^{2x} , $\frac{e^x}{e^4}$, $\exp(\frac{1}{2})$, $\frac{e^{3x+2}}{e^{x-1}}$.
- $\ln(2x)$, $\ln(\sqrt{x})$, $\frac{\ln(4)}{\ln(2)}$, $\ln(\frac{3x}{2})$.
- $\exp(3+\ln(2))$, $\ln(1+e^x)$, $\ln(3e^4)$, $e^{b\ln(a)}$, $\exp(-\ln(x))$.

Exercice 45. La sensation auditive (c'est-à-dire le niveau de bruit ressenti par notre oreille humaine), plus communément appelée aussi niveau sonore, notée L et exprimée en décibels¹ (dB), s'exprime en fonction de l'intensité acoustique I de l'onde sonore reçue de la manière suivante :

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

où I_0 est une intensité de référence égale à $10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ et $\log$ est le logarithme décimal. Lorsque plusieurs sources sonores sont présentes, leurs intensités s'additionnent.

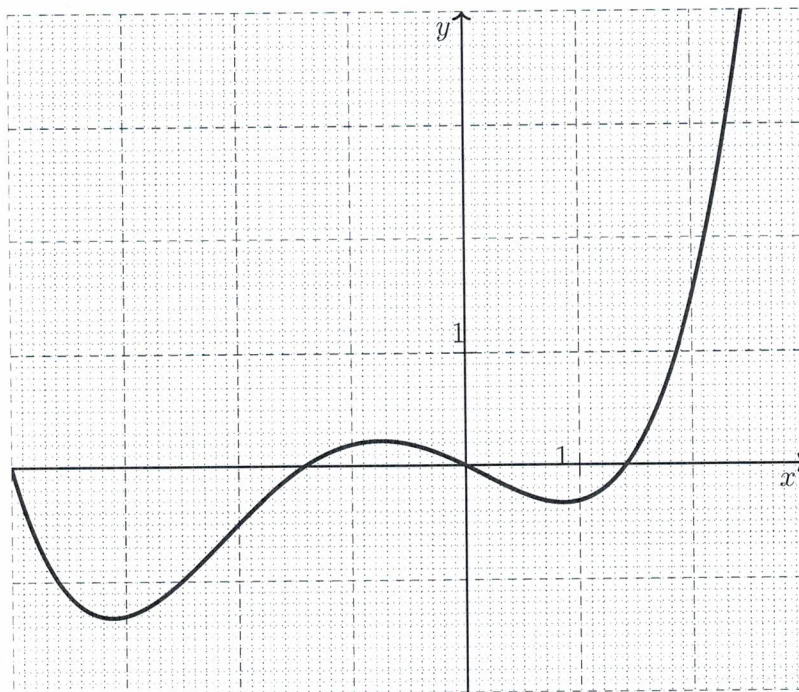
- Une personne reçoit deux ondes sonores de même intensité I . Comment est modifié le niveau sonore par rapport à la situation où une seule onde serait présente ?
- Que donnent deux sources de 40dB chacune ?
- Par combien l'intensité sonore doit-elle être multipliée pour obtenir une augmentation de 20dB ?
- Si on place deux sources, l'une menant à un niveau sonore de 40dB, l'autre à 60dB, quel est alors le niveau sonore de l'ensemble ?

1. Un décibel est égal à 1/10 de bel. Le bel a été nommé en l'honneur du physicien Graham Bell.

10 Lecture de graphiques

 A faire en classe

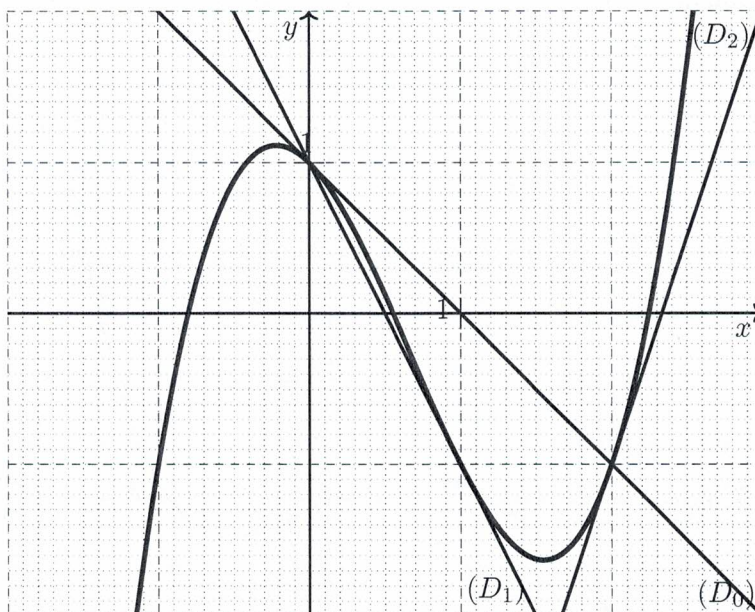
Exercice 46. On considère une fonction f dont une partie du graphe est donnée ci-dessous :



1. Donner une valeur approchée de $f(0)$, de $f(1)$ et de $f(-3)$.
2. Donner une valeur approchée des antécédents de -1 .
3. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$, où $x \in [-4, 3]$.
4. Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ admet-elle sur $[-4, 3]$?
5. Commenter selon la valeur de x le signe de $f(x)$.
6. Commenter les variations de f .
7. Déterminer les extremums (minimums et maximums) locaux de f .
8. Déterminer pour quelles valeurs (approchées) de x on a $-1 < f(x) \leq 0$.
9. Résoudre (avec des valeurs approchées) l'inéquation $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.

✍ A faire en classe

Exercice 47. On considère une fonction f dont une partie du graphe est donnée ci-dessous, ainsi que quelques tangentes :



1. Déterminer graphiquement les équations des droites (D_0) , (D_1) et (D_2) .
2. Déterminer par le calcul le point d'intersection de (D_1) et (D_2) .
3. Donner $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
4. Pour quelles valeurs (approchées) de x a-t-on $f'(x) = 0$?

11 Dérivées

Exercice 48. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- | | | |
|------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ | d) $f(x) = \sin(3x + 1)$ | g) $f(x) = \cos^2(x)$ |
| b) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ | e) $f(x) = x^2 e^x$ | h) $f(x) = e^{-x^2}$ |
| c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ | f) $f(x) = \ln(2x^2 + 1)$ | i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ |

12 Divers

Exercice 49. Que provoquent ces expressions en vous ?

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| a) $(x-3)^2 - (x+2)^2 = 4$ | b) $f'(x) + 5f(x) = 2$ |
| c) $f(x) = e^{-2\ln(\sqrt{x^2+1})}$ | d) $a = \frac{2}{\sqrt{2}}$ |
| e) $b = \frac{26}{6}$ | f) $c = \sqrt{8}$ |